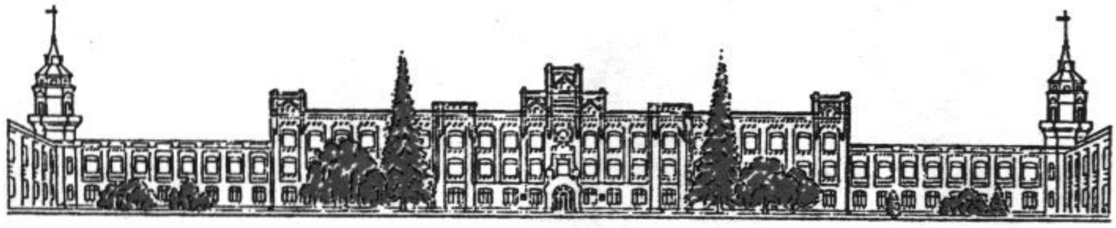
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»



ВИЩА МАТЕМАТИКА

ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ. ВЕКТОРНИЙ АНАЛІЗ

Практикум

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за технічними спеціальностями*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2019

Вища математика : Поверхневі інтеграли. Векторний аналіз : Практикум [Електронний ресурс] : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за технічними спеціальностями / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: Є.В. Массалітіна., О.О. Кільчинський. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,475 Кбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 35 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 8 від 25.04.2019 р.)
за поданням Вченої ради Фізико-математичного факультету (протокол № 3 від 26.03.2019 р.)

Електронне мережне навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА
ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ.
ВЕКТОРНИЙ АНАЛІЗ

Практикум

Укладачі: *Массалітіна Євгенія Вікторівна, канд. фіз.-мат. наук,*
Кільчинський Олександр Олександрович, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Відповідальний редактор: *Дудкін Микола Євгенович, доктор фіз.-мат. наук, проф.*

Рецензент: *Ординська Зоя Павлівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.*

Практикум з розділу «Поверхневі інтеграли. Векторний аналіз» дисципліни «Вища математика» для студентів технічних спеціальностей містить 30 варіантів, кожен варіант складається з 8 завдань (15 задач).

Самостійне виконання цих завдань забезпечує свідоме оволодіння навчальним матеріалом, який передбачено навчальною програмою з вищої математики технічних спеціальностей.

Практикум може бути рекомендований у якості розрахункової роботи з теми «Поверхневі інтеграли. Векторний аналіз».

ВСТУП

Практикум з розділу «Поверхневі інтеграли. Векторний аналіз» дисциплини «Вища математика» для студентів технічних спеціальностей, містить систематизовану добірку задач, без якого неможлива підготовка сучасного інженера.

Поверхневі інтеграли першого та другого роду широко застосовуються в прикладній математиці, фізиці, електротехніці та інших галузях техніки.

Практикум допоможе студентам опрацювати тему «Поверхневі інтеграли. Векторний аналіз», виробити уміння та практичні навички розв′язання основних задач. Це, в свою чергу, забезпечить успішне засвоєння матеріалу, передбаченого навчальною програмою з вищої математики технічних спеціальностей НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського».

Даний практикум містить 30 варіантів, кожен варіант складається з 8 завдань (15 задач).

Практикум може бути рекомендований для використання викладачами вищої математики у якості завдань до розрахункової роботи з теми «Поверхневі інтеграли. Векторний аналіз».

Поверхневі інтеграли. Векторний аналіз

Варіант №1

Завдання 1. Знайти:

а) масу поверхні $\sigma:\ \ z=x^2+y^2\ \ (z\le 9)$ з поверхневою густиною $\gamma(x,y,z)=\dfrac{4z}{\sqrt{1+4z}}$;

б) площу частини поверхні $\sigma:\ \ x+y+z=5$, яку відтинають площини $x=0,\ \ y=0,\ \ x=1,\ \ y=3$.

Завдання 2. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{\,x;\,y;\,z+1\}$ через ту частину площини $P_0:\ x/2+y+z=1$, що розміщена у першому октанті (нормаль до площини P_0 утворює гострий кут з віссю Oz) двома способами:

а) методом проектування на три координатні площини;

б) методом проектування на одну координатну площину.

Завдання 3. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{\,x;\,y;\,z+1\}$ через повну поверхню піраміди G, яка утворена площиною $P_0:\ x/2+y+z=1$ та координатними площинами, у напрямі зовнішньої нормалі до її поверхні:

а) зробити рисунок піраміди і застосувати теорему Гаусса-Остроградського;

б) обчислити безпосередньо.

Завдання 4. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x;\,y;\,z-2\}$ через частину поверхні $G:\ x^2+y^2=z^2\ (z\ge 0)$, яку відтинає площина $P:\ z=1$ (нормаль - зовнішня до замкненої поверхні, утвореної заданими поверхнями):

а) безпосередньо;

б) доповнивши поверхню G до замкненої.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{\ln y+7x;\sin z-2y;\mathrm{e}^y-2z\}$ через замкнену поверхню $G:\ x^2+y^2+z^2=2x+2y+2z-2$ (нормаль - зовнішня до поверхні G).

Завдання 6. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{x^2y^3;9;z+4\}$ вздовж замкненого контуру $L:\begin{cases}x^2+y^2=R^2,\\ z=-1.\end{cases}$

а) За теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 7. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{\,x+4z;\,y;\,6z\}$ по контуру трикутника L, що вирізаний із площини $P_0:\ x+4y+z=4$ координатними площинами:

а) за теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 8.

а) Знайти ротор і дивергенцію векторного поля $\vec{a}=grad\,u,$ де $u=z^2+xy+yz$. Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}$ потенціальним, соленоїдальним, лапласовим;

б) Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}=\{3x-5yz;3y-5xz+;3z-5xy\}$ потенціальним, соленоїдальним.

Поверхневі інтеграли. Векторний аналіз

Варіант №2

Завдання 1. Знайти:

а) масу поверхні $\sigma:\quad x^2+y^2=z^2\ \ (0\le z\le 2)$ з поверхневою густиною $\gamma(x,y,z)=x^2+y^2$;

б) площу частини поверхні $\sigma:\quad z=9-x^2-y^2$, яку відтинає площина $z=0\ \ (z\ge 0)$.

Завдання 2. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x-1;\,y;\,3z\}$ через ту частину площини $P_0:\ x+2y+3z=1$, що розміщена у першому октанті (нормаль до площини P_0 утворює гострий кут з віссю Oz) двома способами:

а) методом проектування на три координатні площини;

б) методом проектування на одну координатну площину.

Завдання 3. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x-1;\,y;\,3z\}$ через повну поверхню піраміди G, яка утворена площиною $P_0:\ x+2y+3z=1$ та координатними площинами, у напрямі зовнішньої нормалі до її поверхні:

а) зробити рисунок піраміди і застосувати теорему Гаусса-Остроградського;

б) обчислити безпосередньо.

Завдання 4. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{\,x;\,y;\,\cos z\}$ через частину поверхні $G:\ x^2+y^2=1$, яку відтинають площини $P_1:\ z=0,\ P_2:\ z=2$ (нормаль - зовнішня до замкненої поверхні, утвореної заданими поверхнями) :

а) безпосередньо;

б) доповнивши поверхню G до замкненої.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{\mathrm{e}^z+3x;\,\mathrm{e}^x+\sin z;\,\mathrm{e}^y+x^2\}$ через замкнену поверхню $G:\ 4x+y+2z=4,\ x=0,\ y=0,\ z=0$ (нормаль - зовнішня до поверхні G).

Завдання 6. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{y;z;x\}$ вздовж замкненого контуру

$$L:\begin{cases} z=4(1-x^2-y^2),\\ z=3.\end{cases}$$

а) За теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 7. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{\,x;\,6x+y;\,z\}$ по контуру трикутника L, що вирізаний із площини $P_0:\ 3x-2y+2z=6$ координатними площинами:

а) за теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 8.

а) Знайти ротор і дивергенцію векторного поля $\vec{a}=grad\,u,$ де $u=z\,\mathrm{e}^{xy}$. Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}$ потенціальним, соленоїдальним, лапласовим;

б) Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}=\{4yz+x;4xz+y;4xy+z\}$ потенціальним, соленоїдальним.

Поверхневі інтеграли. Векторний аналіз

Варіант №3

Завдання 1. Знайти:
а) масу поверхні σ: $6x+3y+2z=12$ $(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$ з поверхневою густиною $\gamma(x,y,z)=z+3x+3y/2$;

б) площу частини поверхні σ: $y=\sqrt{4-x^2}$, яку відтинають площини $z=0,\quad z=2$.

Завдання 2. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{2x;3y+3;z\}$ через ту частину площини P_0: $x/3+y+z/2=1$, що розміщена у першому октанті (нормаль до площини P_0 утворює гострий кут з віссю Oz) двома способами:

а) методом проектування на три координатні площини;
б) методом проектування на одну координатну площину.

Завдання 3. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{2x;3y+3;z\}$ через повну поверхню піраміди G, яка утворена площиною P_0: $x/3+y+z/2=1$ та координатними площинами, у напрямі зовнішньої нормалі до її поверхні:

а) зробити рисунок піраміди і застосувати теорему Гаусса-Остроградського;
б) обчислити безпосередньо

Завдання 4. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x+y;y-x;z\}$ через частину поверхні G: $x^2+y^2+z^2=4$, яку відтинає площина P: $z=0\,(z\ge 0)$ (нормаль - зовнішня до замкненої поверхні, утвореної заданими поверхнями) :

а) безпосередньо;
б) доповнивши поверхню G до замкненої.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{3z^2+x;\mathrm{e}^x-2y;2z-\sqrt{xy}\}$ через замкнену поверхню G: $x^2+y^2=z^2,\ z=1,\ z=4$ (нормаль - зовнішня до поверхні G).

Завдання 6. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{y;-3x;x+y\}$ вздовж замкненого контуру $L:\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ z=9. \end{cases}$

а) За теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 7. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{2x;y;z-3y\}$ по контуру трикутника L, що вирізаний із площини P_0: $2x+3y+z=6$ координатними площинами:

а) за теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 8.
а) Знайти ротор і дивергенцію векторного поля $\vec{a}=grad\,u$, де $u=yz(1+x)$. Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}$ потенціальним, соленоїдальним, лапласовим;
б) Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}=\{2x-9yz;2y-9xz+;2z-9xy\}$ потенціальним, соленоїдальним.

Поверхневі інтеграли. Векторний аналіз

Варіант №4

Завдання 1. Знайти:

а) масу поверхні σ: $x^2+y^2+z^2=9$ $(z\geq 0)$ з поверхневою густиною $\mu(x,y,z)=z$;

б) площу частини поверхні σ: $x+y+z=4$, яку відтинають площини $x=0,\ y=0,\ x=1,\ y=3$.

Завдання 2. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{2x;\ y;\ z+2\}$ через ту частину площини $P_0:\ x+y+z=1$, що розміщена у першому октанті (нормаль до площини P_0 утворює гострий кут з віссю Oz) двома способами:

а) методом проектування на три координатні площини;

б) методом проектування на одну координатну площину.

Завдання 3. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{2x;\ y;\ z+2\}$ через повну поверхню піраміди G, яка утворена площиною $P_0:\ x+y+z=1$ та координатними площинами, у напрямі зовнішньої нормалі до її поверхні:

а) зробити рисунок піраміди і застосувати теорему Гаусса-Остроградського;

б) обчислити безпосередньо.

Завдання 4. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x+y;\ y-x;\ z-2\}$ через частину поверхні $G:\ x^2+y^2=z^2$ $(z\geq 0)$, яку відтинає площина $P:\ z=2$ (нормаль - зовнішня до замкненої поверхні, утвореної заданими поверхнями) :

а) безпосередньо;

б) доповнивши поверхню G до замкненої.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{\cos z+3x;\ \sqrt{x}-2y;\ 3z+y^2\}$ через замкнену поверхню $G:\ z=6(x^2+y^2),\quad z=6$ (нормаль - зовнішня до поверхні G).

Завдання 6. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{-z;-5x;\ xz\}$ вздовж замкненого контуру $L:\begin{cases}x^2+y^2=25,\\ z=4.\end{cases}$

а) За теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 7. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{x-2y;\ y;\ z\}$ по контуру трикутника L, що вирізаний із площини $P_0:\ -2x+y+z=4$ координатними площинами:

а) за теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 8.

а) Знайти ротор і дивергенцію векторного поля $\vec{a}=grad\,u,$ де $u=x^2-4z+y^2$. Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}$ потенціальним, соленоїдальним, лапласовим;

б) Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}=\{9yz+4x; 9xz+4y; 9xy+4z\}$ потенціальним, соленоїдальним.

Поверхневі інтеграли. Векторний аналіз

Варіант №5

Завдання 1. Знайти:

а) масу поверхні, яка обмежена площинами $x=0,\ \ y=0,\ \ z=0,\ \ x=2,\ \ y=2,\ \ z=2$ з поверхневою густиною $\mu(x,y,z)=x^3y^3z^3$;

б) площу частини поверхні $\sigma:\ \ z=4-x^2-y^2$, яку відтинає площина $z=0\ \ (z\geq 0)$.

Завдання 2. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x+1;\,y;\,z\}$ через ту частину площини $P_0:\ 2x+y/2+z=1$, що розміщена у першому октанті (нормаль до площини P_0 утворює гострий кут з віссю Oz) двома способами:

а) методом проектування на три координатні площини;

б) методом проектування на одну координатну площину.

Завдання 3. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x+1;\,y;\,z\}$ через повну поверхню піраміди G, яка утворена площиною $P_0:\ 2x+y/2+z=1$ та координатними площинами, у напрямі зовнішньої нормалі до її поверхні:

а) зробити рисунок піраміди і застосувати теорему Гаусса-Остроградського;

б) обчислити безпосередньо.

Завдання 4. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x;\,y;\,\sin z\}$ через частину поверхні $G:\ x^2+y^2=4$, яку відтинають площини $P_1:\ z=0,\ P_2:\ z=2$ (нормаль - зовнішня до замкненої поверхні, утвореної заданими поверхнями) :

а) безпосередньо;

б) доповнивши поверхню G до замкненої.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{\,\mathrm{e}^{-z}-x;\,xz+3y;\,z+x^2\,\}$ через замкнену поверхню $G:\ 2x+y+2z=2,\ x=0,\ y=0,\ z=0$ (нормаль - зовнішня до поверхні G).

Завдання 6. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{4y;1;4y\}$ вздовж замкненого контуру

$$L:\begin{cases} z^2=x^2+y^2, \\ z=2. \end{cases}$$

а) За теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 7. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{x;\,y-2z;\,z\}$ по контуру трикутника L, що вирізаний із площини $P_0:\ x-2y+z=4$ координатними площинами:

а) за теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 8.

а) Знайти ротор і дивергенцію векторного поля $\vec{a}=grad\,u,$ де $u=xy+z^2/2$. Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}$ потенціальним, соленоїдальним, лапласовим;

б) Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}=\{x-10yz;\,y-10xz+;\,z-10xy\}$ потенціальним, соленоїдальним.

Поверхневі інтеграли. Векторний аналіз

Варіант №6

Завдання 1. Знайти:

а) масу поверхні $\sigma: \quad x^2+y^2=4 \; (0 \le z \le 2)$ з поверхневою густиною $\mu(x,y,z)=\dfrac{1}{4+z^2}$;

б) площу частини поверхні $\sigma: \quad y=4-x^2-z^2$, яку відтинає площина $y=0 \quad (y \ge 0)$.

Завдання 2. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x;\, 2y+1;\, z\}$ через ту частину площини $P_0:\ x/2+y+z=1$, що розміщена у першому октанті (нормаль до площини P_0 утворює гострий кут з віссю Oz) двома способами:

а) методом проектування на три координатні площини;

б) методом проектування на одну координатну площину.

Завдання 3. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x;\, 2y+1;\, z\}$ через повну поверхню піраміди G, яка утворена площиною $P_0:\ x/2+y+z=1$ та координатними площинами, у напрямі зовнішньої нормалі до її поверхні:

а) зробити рисунок піраміди і застосувати теорему Гаусса-Остроградського;

б) обчислити безпосередньо.

Завдання 4. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x+xz^2;\, y;\, z-zx^2\}$ через частину поверхні $G:\ x^2+y^2+z^2=9$, яку відтинає площина $P:\ z=0 \; (z \ge 0)$ (нормаль - зовнішня до замкненої поверхні, утвореної заданими поверхнями).

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{5x-\cos y;\, \mathrm{e}^x-z;\, 2\sqrt{y}-3z\}$ через замкнену поверхню $G:\ x^2+y^2=z^2,\ z=1,\ z=4$ (нормаль - зовнішня до поверхні G).

Завдання 6. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{zy; xz; -yx\}$ вздовж замкненого контуру

$$L:\begin{cases} x=z^2+y^2, \\ x=4. \end{cases}$$

а) За теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 7. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{4x;\, y;\, z-2x\}$ по контуру трикутника L, що вирізаний із площини $P_0:\ x+2y-3z=6$ координатними площинами:

а) за теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 8.

а) Знайти ротор і дивергенцію векторного поля $\vec{a}=grad\,u$, де $u=x\mathrm{e}^{yz}$. Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}$ потенціальним, соленоїдальним, лапласовим;

б) Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}=\{6yz+7x; 6xz+7y; 6xy+7z\}$ потенціальним, соленоїдальним.

Поверхневі інтеграли. Векторний аналіз

Варіант №7

Завдання 1. Знайти:

а) масу поверхні $\sigma:\quad z=x^2+y^2 \quad (z\le 4)$ з поверхневою густиною $\gamma(x,y,z)=\sqrt{1+4z}$;

б) площу частини поверхні $\sigma:\quad x+y+z=3$, яку відтинають площини $x=0,\ \ y=0,\ \ x=2,\ \ y=1$.

Завдання 2. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{2x;\,y;\,2-2z\}$ через ту частину площини $P_0:\ 2x+y/2+z=1$, що розміщена у першому октанті (нормаль до площини P_0 утворює гострий кут з віссю Oz) двома способами:

а) методом проектування на три координатні площини;

б) методом проектування на одну координатну площину.

Завдання 3. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{2x;\,y;\,2-2z\}$ через повну поверхню піраміди G, яка утворена площиною $P_0:\ 2x+y/2+z=1$ та координатними площинами, у напрямі зовнішньої нормалі до її поверхні:

а) зробити рисунок піраміди і застосувати теорему Гаусса-Остроградського;

б) обчислити безпосередньо.

Завдання 4. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x+xy;\,y-x^2;\,z-1\}$ через частину поверхні $G:\ x^2+y^2=z^2\ (z\ge 0)$, яку відтинає площина $P:\ z=3$ (нормаль - зовнішня до замкненої поверхні, утвореної заданими поверхнями) :

а) безпосередньо;

б) доповнивши поверхню G до замкненої.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{4x-2y^2;\,\ln z-4y;\,x+3z/4\}$ через замкнену поверхню $G:\ x^2+y^2+z^2=2x+3$ (нормаль - зовнішня до поверхні G).

Завдання 6. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{xz+y;\,yz-x;\,x^2-y^2\}$ вздовж замкненого контуру $L:\begin{cases} x^2+y^2=9,\\ z=2.\end{cases}$

а) За теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 7. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{x+4z;\,2y;\,z\}$ по контуру трикутника L, що вирізаний із площини $P_0:\ -x+2y+2z=2$ координатними площинами:

а) за теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 8.

а) Знайти ротор і дивергенцію векторного поля $\vec{a}=grad\,u,$ де $u=xz(1+y)$. Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}$ потенціальним, соленоїдальним, лапласовим;

б) Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}=\{x-6yz;\,y-6xz+;\,z-6xy\}$ потенціальним, соленоїдальним.

Поверхневі інтеграли. Векторний аналіз

Варіант №8

Завдання 1. Знайти:

а) масу частини поверхні $\sigma:\ x+y+z=1\ (x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0)$ з поверхневою густиною $\gamma(x,y,z)=\dfrac{1}{(1+x+z)^2}$;

б) площу частини поверхні $\sigma:\ z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, яку відтинає площина $z=0$.

Завдання 2. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x+2;\,y;\,2z\}$ через ту частину площини $P_0:\ 2x+y+z=1$, що розміщена у першому октанті (нормаль до площини P_0 утворює гострий кут з віссю Oz) двома способами:

а) методом проектування на три координатні площини;

б) методом проектування на одну координатну площину.

Завдання 3. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x+2;\,y;\,2z\}$ через повну поверхню піраміди G, яка утворена площиною $P_0:\ 2x+y+z=1$ та координатними площинами, у напрямі зовнішньої нормалі до її поверхні:

а) зробити рисунок піраміди і застосувати теорему Гаусса-Остроградського;

б) обчислити безпосередньо.

Завдання 4. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x^3+xy^2;\,y^3+x^2y;\,z^2\}$ через частину поверхні $G:\ x^2+y^2=1$, яку відтинають площини $P_1:\ z=0,\ P_2:\ z=3$ (нормаль - зовнішня до замкненої поверхні, утвореної заданими поверхнями) :

а) безпосередньо;

б) доповнивши поверхню G до замкненої.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{1+\sqrt{z};\,8y-\sqrt{x};\,xy\}$ через замкнену поверхню $G:\ y=4(x^2+z^2),\ \ y=16$ (нормаль - зовнішня до поверхні G).

Завдання 6. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{5y;\,-x;\,x+4y\}$ вздовж замкненого контуру $L:\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ z=1. \end{cases}$

а) За теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 7. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{x;\,y;\,z-3x\}$ по контуру трикутника L, що вирізаний із площини $P_0:\ x-y+z=2$ координатними площинами:

а) за теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 8.

а) Знайти ротор і дивергенцію векторного поля $\vec{a}=grad\,u$, де $u=x\cos yz$. Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}$ потенціальним, соленоїдальним, лапласовим;

б) Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}=\{5yz+3x;5xz+3y;5xy+3z\}$ потенціальним, соленоїдальним.

Поверхневі інтеграли. Векторний аналіз

Варіант №9

Завдання 1. Знайти:

а) масу поверхні $\sigma:\quad x^2 = z^2 + y^2 \quad (0 \le x \le 4)$ з поверхневою густиною $\mu(x,y,z) = \sqrt{z^2 + y^2}$;

б) площу частини поверхні $\sigma:\quad y = \sqrt{4 - x^2}$, яку відтинають площини $y = 0,\ z = 0,\ z = 2$.

Завдання 2. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = \{x;\, y+3;\, z\}$ через ту частину площини $P_0:\ 2x + 3y + z = 1,$ що розміщена у першому октанті (нормаль до площини P_0 утворює гострий кут з віссю Oz) двома способами:

а) методом проектування на три координатні площини;

б) методом проектування на одну координатну площину.

Завдання 3. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = \{x;\, y+3;\, z\}$ через повну поверхню піраміди G, яка утворена площиною $P_0:\ 2x + 3y + z = 1$ та координатними площинами, у напрямі зовнішньої нормалі до її поверхні:

а) зробити рисунок піраміди і застосувати теорему Гаусса-Остроградського;

б) обчислити безпосередньо.

Завдання 4. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = \{x - y;\, x + y;\, z\}$ через частину поверхні $G:\ x^2 + y^2 + z^2 = 1$, яку відтинає площина $P:\ z = 0\ (z \ge 0)$ (нормаль - зовнішня до замкненої поверхні, утвореної заданими поверхнями) :

а) безпосередньо;

б) доповнивши поверхню G до замкненої.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = \{\sqrt{z} - x;\, x - y;\, y^2 + 6z\}$ через замкнену поверхню $G:\ 3x - y + 2z = 6,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ (нормаль - зовнішня до поверхні G).

Завдання 6. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = \{-x^2 y^3;\, 5;\, z + 1\}$ вздовж замкненого контуру $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ z = 4. \end{cases}$

а) За теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 7. Знайти циркуляцію векторного поля $.\vec{a} = \{x;\, 2x - y;\, z\}$ по контуру трикутника L, що вирізаний із площини $P_0:\ 2x + 6y + z = 6$ координатними площинами:

а) за теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 8.

а) Знайти ротор і дивергенцію векторного поля $\vec{a} = grad\, u,$ де $u = y^2 - z^2 + x^2$. Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}$ потенціальним, соленоїдальним, лапласовим;

б) Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a} = \{2x - 9yz; 2y - 9xz +; 2z - 9xy\}$ потенціальним, соленоїдальним.

Поверхневі інтеграли. Векторний аналіз

Варіант №10

Завдання 1. Знайти:

а) масу поверхні $\sigma: \quad x^2+y^2+z^2=25 \quad (z \ge 0,\ y \ge 0)$ з поверхневою густиною $\gamma(x,y,z)=zx$;

б) площу частини поверхні $\sigma: \ x=1-y^2-z^2$, яку відтинають площини $x=0, \quad z=0$ $(x \ge 0,\ z \ge 0)$.

Завдання 2. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{2x;3y;4z-4\}$ через ту частину площини $P_0:\ 2x+3y+z=1$, що розміщена у першому октанті (нормаль до площини P_0 утворює гострий кут з віссю Oz) двома способами:

а) методом проектування на три координатні площини;

б) методом проектування на одну координатну площину.

Завдання 3. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{2x;3y;4z-4\}$ через повну поверхню піраміди G, яка утворена площиною $P_0:\ 2x+3y+z=1$ та координатними площинами, у напрямі зовнішньої нормалі до її поверхні:

а) зробити рисунок піраміди і застосувати теорему Гаусса-Остроградського;

б) обчислити безпосередньо.

Завдання 4. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{xyz;-x^2z;3\}$ через частину поверхні $G:\ x^2+y^2=z^2\ (z \ge 0)$, яку відтинає площина $P:\ z=2$ (нормаль - зовнішня до замкненої поверхні, утвореної заданими поверхнями) :

а) безпосередньо;

б) доповнивши поверхню G до замкненої.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{yz+x;\ x^2+y;\ xy^2+4z\}$ через замкнену поверхню $G:\ x^2+y^2+z^2=2y$ (нормаль - зовнішня до поверхні G).

Завдання 6. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{x-y;\ x;\ 4-z^2\}$ вздовж замкненого контуру $L: \begin{cases} x^2+y^2=16, \\ z=2. \end{cases}$

а) За теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 7. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{x-6y;\ y;\ 4z\}$ по контуру трикутника L, що вирізаний із площини $P_0:\ -3x+2y+z=6$ координатними площинами:

а) за теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 8.

а) Знайти ротор і дивергенцію векторного поля $\vec{a}=grad\,u$, де $u=xy^2z$. Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}$ потенціальним, соленоїдальним, лапласовим;

б) Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}=\{7yz+2x;7xz+2y;7xy+2z\}$ потенціальним, соленоїдальним.

Поверхневі інтеграли. Векторний аналіз

Варіант №11

Завдання 1. Знайти:
а) масу поверхні, яка обмежена площинами $x=0,\ \ y=0,\ \ z=0,\ \ x=1,\ \ y=1,\ \ z=1$ з поверхневою густиною $\gamma(x,y,z)=x^2y^2z^2$;
б) площу частини поверхні $\sigma:\ x^2+y^2+z^2=25$, яку відтинають площини $z=0,\ \ y=0$ $(z\ge 0,\ y\ge 0)$.

Завдання 2. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x;\, y+2;\, z\}$ через ту частину площини $P_0:\ x+y+z=1$, що розміщена у першому октанті (нормаль до площини P_0 утворює гострий кут з віссю Oz) двома способами:

а) методом проектування на три координатні площини;
б) методом проектування на одну координатну площину.

Завдання 3. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x;\, y+2;\, z\}$ через повну поверхню піраміди G, яка утворена площиною $P_0:\ x+y+z=1$ та координатними площинами, у напрямі зовнішньої нормалі до її поверхні:

а) зробити рисунок піраміди і застосувати теорему Гаусса-Остроградського;
б) обчислити безпосередньо.

Завдання 4. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x+y;\, y-x;\, xyz\}$ через частину поверхні $G:\ x^2+y^2=1$, яку відтинають площини $P_1:\ z=0,\ P_2:\ z=4$ (нормаль - зовнішня до замкненої поверхні, утвореної заданими поверхнями) :

а) безпосередньо;
б) доповнивши поверхню G до замкненої.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{\mathrm{e}^{2y}+x;\, x-2y;\, 6z\}$ через замкнену поверхню $G:\ z=2(x^2+y^2),\ z=8$ (нормаль - зовнішня до поверхні G).

Завдання 6. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{y;z;x\}$ вздовж замкненого контуру

$$L:\begin{cases} x^2+y^2=z^2, \\ z=2. \end{cases}$$

а) За теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 7. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{x;\, y-2z;\, z\}$ по контуру трикутника L, що вирізаний із площини $P_0:\ 2x+y+z=2$ координатними площинами:

а) за теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 8.
а) Знайти ротор і дивергенцію векторного поля $\vec{a}=grad\,u,$ де $u=x+xz+y$. Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}$ потенціальним, соленоїдальним, лапласовим;
б) Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}=\{8x-2yz;8y-2xz+;8z-2xy\}$ потенціальним, соленоїдальним.

Поверхневі інтеграли. Векторний аналіз

Варіант №12

Завдання 1. Знайти:

а) масу частини поверхні $\sigma: \ x=\sqrt{1-y^2}$, яка обмежена поверхнями $z=0, \ z=2$, з поверхневою густиною $\gamma(x,y,z)=xz$;

б) площу частини поверхні $\sigma: \ z=9-x^2-y^2$, яку відтинає площина $z=0 \ (z\ge 0)$.

Завдання 2. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{1-x;\, y;\, 3z\}$ через ту частину площини $P_0: \ x/2+y+z=1$, що розміщена у першому октанті (нормаль до площини P_0 утворює гострий кут з віссю Oz) двома способами:

а) методом проектування на три координатні площини;

б) методом проектування на одну координатну площину.

Завдання 3. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{1-x;\, y;\, 3z\}$ через повну поверхню піраміди G, яка утворена площиною $P_0: \ x/2+y+z=1$ та координатними площинами, у напрямі зовнішньої нормалі до її поверхні:

а) зробити рисунок піраміди і застосувати теорему Гаусса-Остроградського;

б) обчислити безпосередньо.

Завдання 4. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x;\, y+yz;\, z-y^2\}$ через частину поверхні $G: \ x^2+y^2+z^2=1$, яку відтинає площина $P: \ z=0 \ (z\ge 0)$ (нормаль - зовнішня до замкненої поверхні, утвореної заданими поверхнями) :

а) безпосередньо;

б) доповнивши поверхню G до замкненої.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{3x-2z;\, z^2-2y;\, 1+2z\}$ через замкнену поверхню $G: \ z=4(x^2+y^2), \ z=16$ (нормаль - зовнішня до поверхні G).

Завдання 6. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{x^2y^3;\, 3;\, z+4\}$ вздовж замкненого контуру $L: \begin{cases} x^2+y^2=z^2, \\ z=1. \end{cases}$

а) За теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 7. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{2x;\, y;\, z+4y\}$ по контуру трикутника L, що вирізаний із площини $P_0: \ x-2y+3z=6$ координатними площинами:

а) за теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 8.

а) Знайти ротор і дивергенцію векторного поля $\vec{a}=grad\, u$, де $u=xy+y\,z^2/2$. Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}$ потенціальним, соленоїдальним, лапласовим;

б) Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}=\{3yz+7x;\, 3xz+7y;\, 3xy+7z\}$ потенціальним, соленоїдальним.

Поверхневі інтеграли. Векторний аналіз

Варіант №13

Завдання 1. Знайти:

а) масу поверхні σ: $y = x^2 + z^2$ $(y \le 1)$ з поверхневою густиною $\gamma(x, y, z) = |xyz|$;

б) площу частини поверхні σ: $x + y + z = 5$, яку відтинають площини $x = 0,\ y = 0,\ x = 1,\ y = 3$.

Завдання 2. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = \{x; 3y; 1 - z\}$ через ту частину площини P_0: $x/3 + y + z/2 = 1$, що розміщена у першому октанті (нормаль до площини P_0 утворює гострий кут з віссю Oz) двома способами:

а) методом проектування на три координатні площини;

б) методом проектування на одну координатну площину.

Завдання 3. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = \{x; 3y; 1 - z\}$ через повну поверхню піраміди G, яка утворена площиною P_0: $x/3 + y + z/2 = 1$ та координатними площинами, у напрямі зовнішньої нормалі до її поверхні:

а) зробити рисунок піраміди і застосувати теорему Гаусса-Остроградського;

б) обчислити безпосередньо.

Завдання 4. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = \{xz + y; yz - x; z^2 - 2\}$ через частину поверхні G: $x^2 + y^2 = z^2$ $(z \ge 0)$, яку відтинає площина P: $z = 3$ (нормаль - зовнішня до замкненої поверхні, утвореної заданими поверхнями) :

а) безпосередньо;

б) доповнивши поверхню G до замкненої.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = \{e^z + x/4; 3\ln x + y/4; z/4\}$ через замкнену поверхню G: $x^2 + y^2 + z^2 = 2x - 2y + 2z - 2$ (нормаль - зовнішня до поверхні G).

Завдання 6. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = \{x - y; 4x; -z\}$ вздовж замкненого контуру L: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = 5. \end{cases}$

а) За теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 7. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = \{x + 4y; y; z\}$ по контуру трикутника L, що вирізаний із площини P_0: $-x + 2y + 2z = 2$ координатними площинами:

а) за теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 8.

а) Знайти ротор і дивергенцію векторного поля $\vec{a} = grad\, u$, де $u = x + yz + z$. Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}$ потенціальним, соленоїдальним, лапласовим;

б) Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a} = \{8x - yz; 8y - xz +; 8z - xy\}$ потенціальним, соленоїдальним.

Поверхневі інтеграли. Векторний аналіз

Варіант №14

Завдання 1. Знайти:
а) масу поверхні $\sigma:\ x+3y+2z=6$ $(x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0)$ з поверхневою густиною $\gamma(x,y,z)=z+x/2+3y/2$;
б) площу частини поверхні $\sigma:\ x^2+y^2+z^2=4$, яку відтинають площини $x=0,\ \ y=0,\ \ z=0$ $(y\geq 0,\ x\geq 0,\ z\geq 0)$.

Завдання 2. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x;3-y;6z\}$ через ту частину площини $P_0:\ x/2+y/3+z=1$, що розміщена у першому октанті (нормаль до площини P_0 утворює гострий кут з віссю Oz) двома способами:

а) методом проектування на три координатні площини;
б) методом проектування на одну координатну площину.

Завдання 3. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x;3-y;6z\}$ через повну поверхню піраміди G, яка утворена площиною $P_0:\ x/2+y/3+z=1$ та координатними площинами, у напрямі зовнішньої нормалі до її поверхні:

а) зробити рисунок піраміди і застосувати теорему Гаусса-Остроградського;
б) обчислити безпосередньо.

Завдання 4. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x-y;x+y;z^2\}$ через частину поверхні $G:\ x^2+y^2=1$, яку відтинають площини $P_1:\ z=0,\ P_2:\ z=2$ (нормаль - зовнішня до замкненої поверхні, утвореної заданими поверхнями) :

а) безпосередньо;
б) доповнивши поверхню G до замкненої.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{\sqrt{z}-2x;\mathrm{e}^x+3y;\sqrt{y+x}\}$ через замкнену поверхню $G:\ x^2+y^2=z^2,\ z=3,\ z=9$ (нормаль - зовнішня до поверхні G).

Завдання 6. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{8y;1;-2yz\}$ вздовж замкненого контуру

$$L:\begin{cases} z=2(1-x^2-y^2), \\ z=-6. \end{cases}$$

а) За теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 7. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{x;\ y-3z;\ z\}$ по контуру трикутника L, що вирізаний із площини $P_0:\ x-2y+3z=6$ координатними площинами:

а) за теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 8.
а) Знайти ротор і дивергенцію векторного поля $\vec{a}=grad\,u$, де $u=z\cos xy$. Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}$ потенціальним, соленоїдальним, лапласовим;
б) Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}=\{3yz+6x;3xz+6y;3xy+6z\}$ потенціальним, соленоїдальним.

Поверхневі інтеграли. Векторний аналіз

Варіант №15

Завдання 1. Знайти:

а) масу поверхні σ: $z^2 = x^2 + y^2$ $(0 \le z \le 1)$ з поверхневою густиною $\gamma(x, y, z) = x^2 + y^2$;

б) площу поверхні σ: $x = \sqrt{1 - y^2}$, яку відтинають площини $x = 0$, $z = 0$, $z = 2$.

Завдання 2. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = \{2 - x;\ y;\ 12z\}$ через ту частину площини P_0: $2x + y/2 + z = 1$, що розміщена у першому октанті (нормаль до площини P_0 утворює гострий кут з віссю Oz) двома способами:

а) методом проектування на три координатні площини;

б) методом проектування на одну координатну площину.

Завдання 3. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = \{2 - x;\ y;\ 12z\}$ через повну поверхню піраміди G, яка утворена площиною P_0: $2x + y/2 + z = 1$ та координатними площинами, у напрямі зовнішньої нормалі до її поверхні:

а) зробити рисунок піраміди і застосувати теорему Гаусса-Остроградського;

б) обчислити безпосередньо.

Завдання 4. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = \{x + z;\ y;\ z - x\}$ через частину поверхні G: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, яку відтинає площина P: $z = 0$ $(z \ge 0)$ (нормаль - зовнішня до замкненої поверхні, утвореної заданими поверхнями) :

а) безпосередньо;

б) доповнивши поверхню G до замкненої.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = \{e^y + 2x;\ \sqrt{x} - y;\ 2z - 1\}$ через замкнену поверхню G: $x - 2y + z = 6,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ (нормаль - зовнішня до поверхні G).

Завдання 6. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = \{-z; -x; xz\}$ вздовж замкненого контуру $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ z = 4. \end{cases}$

а) За теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 7. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = \{x;\ 3y;\ z + 3y\}$ по контуру трикутника L, що вирізаний із площини P_0: $x - 2y + z = 2$ координатними площинами:

а) за теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 8.

а) Знайти ротор і дивергенцію векторного поля $\vec{a} = grad\, u$, де $u = \ln xyz$. Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}$ потенціальним, соленоїдальним, лапласовим;

б) Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a} = \{4x - 5yz; 4y - 5xz+; 4z - 5xy\}$ потенціальним, соленоїдальним.

Поверхневі інтеграли. Векторний аналіз

Варіант №16

Завдання 1. Знайти:

а) масу поверхні $\sigma:\ x^2+y^2+z^2=R^2$ $(z\ge 0,\quad y\ge 0)$ з поверхневою густиною $\gamma(x,y,z)=zy$;

б) площу частини поверхні $\sigma:\ x+y+z=7$, яку відтинають площини $x=0,\quad y=0,\ x=1,\ y=5$.

Завдання 2. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x;3y+3;2z\}$ через ту частину площини $P_0:\ x+y+z=1$, що розміщена у першому октанті (нормаль до площини P_0 утворює гострий кут з віссю Oz) двома способами:

а) методом проектування на три координатні площини;

б) методом проектування на одну координатну площину.

Завдання 3. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x;3y+3;2z\}$ через повну поверхню піраміди G, яка утворена площиною $P_0:\ x+2y+z=4$ та координатними площинами, у напрямі зовнішньої нормалі до її поверхні:

а) зробити рисунок піраміди і застосувати теорему Гаусса-Остроградського;

б) обчислити безпосередньо.

Завдання 4. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x;y;xyz\}$ через частину поверхні $G:\ x^2+y^2=1$, яку відтинають площини $P_1:\ z=0,\ P_2:\ z=5$ (нормаль - зовнішня до замкненої поверхні, утвореної заданими поверхнями) :

а) безпосередньо;

б) доповнивши поверхню G до замкненої.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x+3y^2;\ xz+y;\ \sqrt{x^2+1}+z\}$ через замкнену поверхню $G:\ x^2+y^2=z^2,\ z=1,\ z=3$ (нормаль - зовнішня до поверхні G).

Завдання 6. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{4y;1;-4yz\}$ вздовж замкненого контуру

$$L:\begin{cases}x^2+y^2=z^2,\\ z=5\end{cases}$$

а) За теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 7. Знайти циркуляцію векторного поля . $\vec{a}=\{2x+2z;\ y;\ z\}$ по контуру трикутника L, що вирізаний із площини $P_0:\ -3x+y+2z=6$ координатними площинами:

а) за теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 8.

а) Знайти ротор і дивергенцію векторного поля $\vec{a}=grad\,u$, де $u=xy+yz+zx$. Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}$ потенціальним, соленоїдальним, лапласовим;

б) Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}=\{5yz+x;5xz+y;5xy+z\}$ потенціальним, соленоїдальним.

Поверхневі інтеграли. Векторний аналіз

Варіант №17

Завдання 1. Знайти:
а) масу поверхні, яка обмежена площинами $x=0,\ \ y=0,\ \ z=0,\ \ x=2,\ \ y=3,\ \ z=2$, з поверхневою густиною $\mu(x,y,z)=xy^2z$;
б) площу поверхні $\sigma:\ \ y=\sqrt{9-x^2}$, яку відтинають площини $y=0,\ \ z=0,\ \ z=2$.

Завдання 2. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{2x;5y;5z-5\}$ через ту частину площини $P_0:\ x/2+y/3+z=1$, що розміщена у першому октанті (нормаль до площини P_0 утворює гострий кут з віссю Oz) двома способами:

а) методом проектування на три координатні площини;
б) методом проектування на одну координатну площину.

Завдання 3. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{2x;5y;5z-5\}$ через повну поверхню піраміди G, яка утворена площиною $P_0:\ x/2+y/3+z=1$ та координатними площинами, у напрямі зовнішньої нормалі до її поверхні:

а) зробити рисунок піраміди і застосувати теорему Гаусса-Остроградського;
б) обчислити безпосередньо.

Завдання 4. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{y^2x;-yx^2;1\}$ через частину поверхні $G:\ x^2+y^2=z^2\ (z\ge 0)$, яку відтинає площина $P:\ z=5$ (нормаль - зовнішня до замкненої поверхні, утвореної заданими поверхнями) :

а) безпосередньо;
б) доповнивши поверхню G до замкненої.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{\mathrm{e}^y+2x;\sqrt{xz}-y;\mathrm{e}^{xy}-z/4\}$ через замкнену поверхню $G:\ x^2+y^2+z^2=2y+8$ (нормаль - зовнішня до поверхні G).

Завдання 6. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{y;z;x\}$ вздовж замкненого контуру

$$L:\begin{cases} z=2(1-x^2-y^2), \\ z=1/2. \end{cases}$$

а) За теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 7. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{x;\,y+4z;\,z\}$ по контуру трикутника L, що вирізаний із площини $P_0:\ 2x-y+z=4$ координатними площинами:

а) за теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 8.
а) Знайти ротор і дивергенцію векторного поля $\vec{a}=grad\,u$, де $u=y^2-z+x^2$. Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}$ потенціальним, соленоїдальним, лапласовим;
б) Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}=\{3x-7yz;3y-7xz+;3z-7xy\}$ потенціальним, соленоїдальним.

Поверхневі інтеграли. Векторний аналіз

Варіант №18

Завдання 1. Знайти:

а) масу частини поверхні $\sigma: \ x=\sqrt{4-y^2}$ $(z=0,\ z=1)$ з поверхневою густиною $\mu(x,y,z)=x(y+z)$;

б) площу частини поверхні $\sigma: \ z=16-x^2-y^2$, яку відтинає площина $z=0$ $(z\geq 0)$.

Завдання 2. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{3x;\, y+1;\, 2z\}$ через ту частину площини $P_0:\ x+y/2+z/2=1$, що розміщена у першому октанті (нормаль до площини P_0 утворює гострий кут з віссю Oz) двома способами:

а) методом проектування на три координатні площини;

б) методом проектування на одну координатну площину.

Завдання 3. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{3x;\, y+1;\, 2z\}$ через повну поверхню піраміди G, яка утворена площиною $P_0:\ x+y/2+z/2=1$ та координатними площинами, у напрямі зовнішньої нормалі до її поверхні:

а) зробити рисунок піраміди і застосувати теорему Гаусса-Остроградського;

б) обчислити безпосередньо.

Завдання 4. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x+xy;\, y-x^2;\, z\}$ через частину поверхні $G:\ x^2+y^2+z^2=1$, яку відтинає площина $P:\ z=0\ (z\geq 0)$ (нормаль - зовнішня до замкненої поверхні, утвореної заданими поверхнями) :

а) безпосередньо;

б) доповнивши поверхню G до замкненої.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{8yz-x;\, x^2-1;\, xy-2z\}$ через замкнену поверхню $G:\ 2x+y-3z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0$ (нормаль - зовнішня до поверхні G).

Завдання 6. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{xy^2;\,4;\, z^2+1\}$ вздовж замкненого контуру $L:\begin{cases} x^2+y^2=z^2, \\ z=2. \end{cases}$

а) За теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 7. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{2x;\, y;\, z+4y\}$ по контуру трикутника L, що вирізаний із площини $P_0:\ 2x+y+z=2$ координатними площинами:

а) за теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 8.

а) Знайти ротор і дивергенцію векторного поля $\vec{a}=grad\,u$, де $u=y\,e^{xz}$. Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}$ потенціальним, соленоїдальним, лапласовим;

б) Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}=\{9yz+x; 9xz+y; 9xy+z\}$ потенціальним, соленоїдальним.

Поверхневі інтеграли. Векторний аналіз

Варіант №19

Завдання 1. Знайти:
а) масу поверхні σ: $4z = x^2 + y^2$ ($z \le 4$) з поверхневою густиною $\gamma(x,y,z) = \sqrt{z}$;
б) площу частини поверхні σ: $x + y + z = 6$. яку відтинають площини $x = 0,\ y = 0,\ x = 1,\ y = 4$.

Завдання 2. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = \{x-1; y; z\}$ через ту частину площини $P_0: x + y/2 + z/3 = 1$, що розміщена у першому октанті (нормаль до площини P_0 утворює гострий кут з віссю Oz) двома способами:

а) методом проектування на три координатні площини;
б) методом проектування на одну координатну площину.

Завдання 3. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = \{x-1; y; z\}$ через повну поверхню піраміди G, яка утворена площиною $P_0: x + y/2 + z/3 = 1$ та координатними площинами, у напрямі зовнішньої нормалі до її поверхні:

а) зробити рисунок піраміди і застосувати теорему Гаусса-Остроградського;
б) обчислити безпосередньо.

Завдання 4. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = \{xz; yz; z^2 - 1\}$ через частину поверхні $G: x^2 + y^2 = z^2$ $(z \ge 0)$, яку відтинає площина $P: z = 4$ (нормаль - зовнішня до замкненої поверхні, утвореної заданими поверхнями) :

а) безпосередньо;
б) доповнивши поверхню G до замкненої.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = \{y + z^2; x^2 + 3y; xy + 4\}$ через замкнену поверхню $G: x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ (нормаль - зовнішня до поверхні G).

Завдання 6. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = \{x - y; x; -z\}$ вздовж замкненого контуру $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 9. \end{cases}$

а) За теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 7. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = \{x + 3y; y; 3z\}$ по контуру трикутника L, що вирізаний із площини $P_0: 2x - y + z = 4$ координатними площинами:

а) за теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 8.
а) Знайти ротор і дивергенцію векторного поля $\vec{a} = grad\, u,$ де $u = x + z + y^2/2$. Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}$ потенціальним, соленоїдальним, лапласовим;
б) Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a} = \{x - 6yz; y - 6xz+; z - 6xy\}$ потенціальним, соленоїдальним.

Поверхневі інтеграли. Векторний аналіз

Варіант №20

Завдання 1. Знайти:
а) масу частини поверхні $\sigma:\ 6x+y+2z=12$ $(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$ з поверхневою густиною $\gamma(x,y,z)=z+3x+y/2$;
б) площу поверхні $\sigma:\ x=\sqrt{25-y^2-z^2}$, яку відтинає площина $x=0$.

Завдання 2. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{2x;\,y;\,z-3\}$ через ту частину площини $P_0:\ x+y+z=1$, що розміщена у першому октанті (нормаль до площини P_0 утворює гострий кут з віссю Oz) двома способами:

а) методом проектування на три координатні площини;
б) методом проектування на одну координатну площину.

Завдання 3. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{2x;\,y;\,z-3\}$ через повну поверхню піраміди G, яка утворена площиною $P_0:\ x+y+z=1$ та координатними площинами, у напрямі зовнішньої нормалі до її поверхні:

а) зробити рисунок піраміди і застосувати теорему Гаусса-Остроградського;
б) обчислити безпосередньо.

Завдання 4. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x;\,y;\,z^3\}$ через частину поверхні $G:\ x^2+y^2=1$, яку відтинають площини $P_1:\ z=0,\ P_2:\ z=1$ (нормаль - зовнішня до замкненої поверхні, утвореної заданими поверхнями) :

а) безпосередньо;
б) доповнивши поверхню G до замкненої.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{2\sqrt{z}+y;\,3x+z;\,3z+x^2\}$ через замкнену поверхню $G:\ z=3(x^2+y^2),\ z=27$ (нормаль - зовнішня до поверхні G).

Завдання 6. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{y;-x;x+y\}$ вздовж замкненого контуру $L:\begin{cases} z^2=x^2+y^2, \\ z=4. \end{cases}$

а) За теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 7. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{x;\,y+4z;\,z\}$ по контуру трикутника L, що вирізаний із площини $P_0:\ 2x+3y-z=6$ координатними площинами:

а) за теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 8.
а) Знайти ротор і дивергенцію векторного поля $\vec{a}=grad\,u,$ де $u=x+z+y^2$. Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}$ потенціальним, соленоїдальним, лапласовим;
б) Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}=\{4yz+6x;4xz+6y;4xy+6z\}$ потенціальним, соленоїдальним.

Поверхневі інтеграли. Векторний аналіз

Варіант №21

Завдання 1. Знайти:

а) масу поверхні $\sigma:\quad z=\sqrt{x^2+y^2}\quad (z\le 4)$ з поверхневою густиною $\gamma(x,y,z)=z$;

б) площу частини поверхні $\sigma:\quad z=4-x^2-y^2$, яку відтинає площина $z=0\ (z\ge 0)$.

Завдання 2. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x;\,y+3;\,8z\}$ через ту частину площини $P_0:\ x+2y+z/2=1$, що розміщена у першому октанті (нормаль до площини P_0 утворює гострий кут з віссю Oz) двома способами:

а) методом проектування на три координатні площини;

б) методом проектування на одну координатну площину.

Завдання 3. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x;\,y+3;\,8z\}$ через повну поверхню піраміди G, яка утворена площиною $P_0:\ x+2y+z/2=1$ та координатними площинами, у напрямі зовнішньої нормалі до її поверхні:

а) зробити рисунок піраміди і застосувати теорему Гаусса-Остроградського;

б) обчислити безпосередньо.

Завдання 4. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x+z;\ y+z;\,z-x-y\}$ через частину поверхні $G:\ x^2+y^2+z^2=4$, яку відтинає площина $P:\ z=0\ (z\ge 0)$ (нормаль - зовнішня до замкненої поверхні, утвореної заданими поверхнями) :

а) безпосередньо;

б) доповнивши поверхню G до замкненої.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{2\sqrt{y}z-x;\,xz+2y;\,x^2+z\}$ через замкнену поверхню $G:\ y-2x+z=4,\ x=0,\ y=0,\ z=0$ (нормаль - зовнішня до поверхні G).

Завдання 6. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{2z;\,x;\,-x^2\}$ вздовж замкненого контуру $L:\begin{cases}x^2+y^2=9,\\ z=8.\end{cases}$

а) За теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 7. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{x;\,y;\,2z+4x\}$ по контуру трикутника L, що вирізаний із площини $P_0:\ 2x+2y+z=2$ координатними площинами:

а) за теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 8.

а) Знайти ротор і дивергенцію векторного поля $\vec{a}=grad\,u$, де $u=xyz$. Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}$ потенціальним, соленоїдальним, лапласовим;

б) Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}=\{2x-5yz;\,2y-5xz+;\,2z-5xy\}$ потенціальним, соленоїдальним.

Поверхневі інтеграли. Векторний аналіз

Варіант №22

Завдання 1. Знайти:

а) масу поверхні $\sigma: \quad x^2+y^2+z^2=4 \quad (z \geq 0)$ з поверхневою густиною $\gamma(x,y,z)=x^2y^2z$;

б) площу частини поверхні $\sigma: \quad x+y+z=6$, яку відтинають площини $x=0, \; y=0, \; x=4, \; y=1$.

Завдання 2. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x-1; 2y; z\}$ через ту частину площини $P_0: x+2y+z/2=1$, що розміщена у першому октанті (нормаль до площини P_0 утворює гострий кут з віссю Oz) двома способами:

а) методом проектування на три координатні площини;

б) методом проектування на одну координатну площину.

Завдання 3. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x-1; 2y; z\}$ через повну поверхню піраміди G, яка утворена площиною $P_0: x+2y+z/2=1$ та координатними площинами, у напрямі зовнішньої нормалі до її поверхні:

а) зробити рисунок піраміди і застосувати теорему Гаусса-Остроградського;

б) обчислити безпосередньо.

Завдання 4. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x; y; 2z\}$ через частину поверхні $G: x^2+y^2=1$, яку відтинають площини $P_1: z=0, P_2: z=3$ (нормаль - зовнішня до замкненої поверхні, утвореної заданими поверхнями) :

а) безпосередньо;

б) доповнивши поверхню G до замкненої.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{\sin z+2x; \operatorname{sh} x-3y; \sin y+2z\}$ через замкнену поверхню $G: x^2+y^2=z^2, \; z=3, \; z=6$ (нормаль - зовнішня до поверхні G).

Завдання 6. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{-x^2y^3; 8; z^3\}$ вздовж замкненого контуру $L: \begin{cases} x^2+y^2=z, \\ z=9. \end{cases}$

а) За теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 7. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{x+2y; y; z\}$ по контуру трикутника L, що вирізаний із площини $P_0: 2x+3y+z=6$ координатними площинами:

а) за теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 8.

а) Знайти ротор і дивергенцію векторного поля $\vec{a}=grad\, u$, де $u=x^2yz$. Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}$ потенціальним, соленоїдальним, лапласовим;

б) Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}=\{yz+9x; xz+9y; xy+9z\}$ потенціальним, соленоїдальним.

Поверхневі інтеграли. Векторний аналіз

Варіант №23

Завдання 1. Знайти:
а) масу поверхні, яка обмежена площинами $x=0,\ \ y=0,\ \ z=0,\ \ x=3,\ \ y=2,\ \ z=2$, з поверхневою густиною $\mu(x,y,z)=x^2yz$;
б) площу частини поверхні $\sigma:\ \ z=x^2+y^2$, яку відтинає площина $z=9\ \ (z\le 9)$.

Завдання 2. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{2x;3y;z+1\}$ через ту частину площини $P_0:\ 2x+3y+z=1$, що розміщена у першому октанті (нормаль до площини P_0 утворює гострий кут з віссю Oz) двома способами:

а) методом проектування на три координатні площини;
б) методом проектування на одну координатну площину.

Завдання 3. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{2x;3y;z+1\}$ через повну поверхню піраміди G, яка утворена площиною $P_0:\ 2x+3y+z=1$ та координатними площинами, у напрямі зовнішньої нормалі до її поверхні:

а) зробити рисунок піраміди і застосувати теорему Гаусса-Остроградського;
б) обчислити безпосередньо.

Завдання 4. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{xy;-x^2;3\}$ через частину поверхні $G:\ x^2+y^2=z^2\ (z\ge 0)$, яку відтинає площина $P:\ z=1$ (нормаль - зовнішня до замкненої поверхні, утвореної заданими поверхнями) :

а) безпосередньо;
б) доповнивши поверхню G до замкненої.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{\cos z+x/4;\, e^x+y/4;\, z/4-1\}$ через замкнену поверхню $G:\ x^2+y^2+z^2=2y+3$ (нормаль - зовнішня до поверхні G).

Завдання 6. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{xz+y;\, yz-x;\, x^2+y^2\}$ вздовж замкненого контуру $L:\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ z=3. \end{cases}$

а) За теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 7. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{x;\, y+6z;\, z\}$ по контуру трикутника L, що вирізаний із площини $P_0:\ \ x-2y+z=4$ координатними площинами:

а) за теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 8.
а) Знайти ротор і дивергенцію векторного поля $\vec{a}=grad\,u,$ де $u=x^2y^2+z^2$. Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}$ потенціальним, соленоїдальним, лапласовим;
б) Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}=\{x-8yz;\, y-8xz+;\, z-8xy\}$ потенціальним, соленоїдальним.

Поверхневі інтеграли. Векторний аналіз

Варіант №24

Завдання 1. Знайти:

а) масу частини поверхні $\sigma: \ x=\sqrt{25-y^2} \quad (0\le z\le 5)$ з поверхневою густиною $\gamma(x,y,z)=\dfrac{1}{25+z^2}$;

б) площу частини поверхні $\sigma: \ z=2-\sqrt{x^2+y^2}$, яку відтинає площина $z=0 \ (z\ge 0)$.

Завдання 2. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x;\, 2-y;\, 4z\}$ через ту частину площини $P_0: \ x+2y+z/2=1$, що розміщена у першому октанті (нормаль до площини P_0 утворює гострий кут з віссю Oz) двома способами:

а) методом проектування на три координатні площини;

б) методом проектування на одну координатну площину.

Завдання 3. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x;\, 2-y;\, 4z\}$ через повну поверхню піраміди G, яка утворена площиною $P_0: \ x+2y+z/2=1$ та координатними площинами, у напрямі зовнішньої нормалі до її поверхні:

а) зробити рисунок піраміди і застосувати теорему Гаусса-Остроградського;

б) обчислити безпосередньо.

Завдання 4. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x;\, y+yz^2;\, z-zy^2\}$ через частину поверхні $G: \ x^2+y^2+z^2=4$, яку відтинає площина $P: \ z=0 \ (z\ge 0)$ (нормаль - зовнішня до замкненої поверхні, утвореної заданими поверхнями) :

а) безпосередньо;

б) доповнивши поверхню G до замкненої.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{\sqrt{z}+1+x;\, 2x+y;\, \sin x+z\}$ через замкнену поверхню $G: \ x=z^2+y^2, \ x=16$ (нормаль - зовнішня до поверхні G).

Завдання 6. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{x-y; x; -z\}$ вздовж замкненого контуру

$$L: \begin{cases} x^2+y^2=16, \\ z=1. \end{cases}$$

а) За теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 7. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{x;\, 2y;\, z+4x\}$ по контуру трикутника L, що вирізаний із площини $P_0: \ 2x+6y-z=6$ координатними площинами:

а) за теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 8.

а) Знайти ротор і дивергенцію векторного поля $\vec{a}=grad\, u$, де $u=xy+y+z$. Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}$ потенціальним, соленоїдальним, лапласовим;

б) Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}=\{yz+7x; xz+7y; xy+7z\}$ потенціальним, соленоїдальним.

Поверхневі інтеграли. Векторний аналіз

Варіант №25

Завдання 1. Знайти:

а) масу поверхні $\sigma:\quad z=x^2+y^2\quad (z\le 4)$ з поверхневою густиною $\gamma(x,y,z)=\dfrac{z^2}{\sqrt{1+4z}}$;

б) площу поверхні $\sigma:\quad y=\sqrt{16-x^2-z^2}$, яку відтинає площина $y=0$.

Завдання 2. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{1-x;\, y;\, 4z\}$ через ту частину площини $P_0:\ x/3+y+z/2=1$, що розміщена у першому октанті (нормаль до площини P_0 утворює гострий кут з віссю Oz) двома способами:

а) методом проектування на три координатні площини;

б) методом проектування на одну координатну площину.

Завдання 3. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{1-x;\, y;\, 4z\}$ через повну поверхню піраміди G, яка утворена площиною $P_0:\ x/3+y+z/2=1$ та координатними площинами, у напрямі зовнішньої нормалі до її поверхні:

а) зробити рисунок піраміди і застосувати теорему Гаусса-Остроградського;

б) обчислити безпосередньо.

Завдання 4. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{y;\, -x;\, 1\}$ через частину поверхні $G:\ x^2+y^2=z^2\ (z\ge 0)$, яку відтинає площина $P:\ z=4$ (нормаль - зовнішня до замкненої поверхні, утвореної заданими поверхнями) :

а) безпосередньо;

б) доповнивши поверхню G до замкненої.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{5x-6y; 11x^2+2y;\ x^2-4z\}$ через замкнену поверхню $G:\ 2x-y+2z=4,\quad x=0,\ y=0,\ z=0$ (нормаль - зовнішня до поверхні G).

Завдання 6. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{-x^2y^3;1;z\}$ вздовж замкненого контуру $L:\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ z=5. \end{cases}$

а) За теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 7. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{x+8z;\, 4y;\, z\}$ по контуру трикутника L, що вирізаний із площини $P_0:\ x+y+z=2$ координатними площинами:

а) за теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 8.

а) Знайти ротор і дивергенцію векторного поля $\vec{a}=grad\, u,$ де $u=e^{xyz}$. Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}$ потенціальним, соленоїдальним, лапласовим;

б) Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}=\{3x-2yz; 3y-2xz+; 3z-2xy\}$ потенціальним, соленоїдальним.

Поверхневі інтеграли. Векторний аналіз

Варіант №26

Завдання 1. Знайти:

а) масу частини поверхні σ: $3x+6y+2z=6$ ($x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$)з поверхневою густиною $\gamma(x,y,z)=z+3x/2+3y$;

б) площу частини поверхні σ: $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$, яку відтинає площина $z=0$ $(z\ge 0)$.

Завдання 2. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{2x;\, y;\, z+2\}$ через ту частину площини P_0: $x+y/2+z/3=1$, що розміщена у першому октанті (нормаль до площини P_0 утворює гострий кут з віссю Oz) двома способами:

а) методом проектування на три координатні площини;

б) методом проектування на одну координатну площину.

Завдання 3. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{2x;\, y;\, z+2\}$ через повну поверхню піраміди G, яка утворена площиною P_0: $x+y/2+z/3=1$ та координатними площинами, у напрямі зовнішньої нормалі до її поверхні:

а) зробити рисунок піраміди і застосувати теорему Гаусса-Остроградського;

б) обчислити безпосередньо.

Завдання 4. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x;\, y;\, -z\}$ через частину поверхні G: $x^2+y^2=1$, яку відтинають площини P_1: $z=0$, P_2: $z=4$ (нормаль - зовнішня до замкненої поверхні, утвореної заданими поверхнями) :

а) безпосередньо;

б) доповнивши поверхню G до замкненої.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{8x+1;\, z\sqrt{x}-4y;\, \mathrm{e}^x-z\}$ через замкнену поверхню G: $x^2+y^2+z^2=2z$ (нормаль - зовнішня до поверхні G).

Завдання 6. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{x^2y^3;\, 4;\, z^2\}$ вздовж замкненого контуру L: $\begin{cases} x^2+y^2=z, \\ z=16. \end{cases}$

а) За теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 7. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{2x;\, y+4x;\, z\}$ по контуру трикутника L, що вирізаний із площини P_0: $-2x+3y+z=6$ координатними площинами:

а) за теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 8.

а) Знайти ротор і дивергенцію векторного поля $\vec{a}=grad\, u$, де $u=xy(1+z)$. Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}$ потенціальним, соленоїдальним, лапласовим;

б) Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}=\{yz+6x;\, xz+6y;\, xy+6z\}$ потенціальним, соленоїдальним.

Поверхневі інтеграли. Векторний аналіз

Варіант №27

Завдання 1. Знайти:

а) масу поверхні $\sigma: \quad z=\sqrt{x^2+y^2} \quad (z \le 1)$ з поверхневою густиною $\gamma(x,y,z)=z$;

б) площу частини поверхні $\sigma: \ x+y+z=9$, яку відтинають площини $x=0,\ y=0,$ $x=2,\ y=5.$

Завдання 2. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{2x;\, y+3;\, z\}$ через ту частину площини $P_0:\ 2x+3y+z=1$, що розміщена у першому октанті (нормаль до площини P_0 утворює гострий кут з віссю Oz) двома способами:

а) методом проектування на три координатні площини;

б) методом проектування на одну координатну площину.

Завдання 3. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{2x;\, y+3;\, z\}$ через повну поверхню піраміди G, яка утворена площиною $P_0:\ 2x+3y+z=1$ та координатними площинами, у напрямі зовнішньої нормалі до її поверхні:

а) зробити рисунок піраміди і застосувати теорему Гаусса-Остроградського;

б) обчислити безпосередньо.

Завдання 4. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x+xz;\, y;\, z-x^2\}$ через частину поверхні $G:\ x^2+y^2+z^2=4\ (z \ge 0)$, яку відтинає площина $P:\ z=0$ (нормаль - зовнішня до замкненої поверхні, утвореної заданими поверхнями) :

а) безпосередньо;

б) доповнивши поверхню G до замкненої.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{3yz-x;\, x^2-y;\ 6z-1\}$ через замкнену поверхню $G:\ z=6(x^2+y^2), \quad z=54$ (нормаль - зовнішня до поверхні G).

Завдання 6. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{x^2y^3;1;z\}$ вздовж замкненого контуру

$$L:\begin{cases} x^2+y^2=R^2, \\ z=5. \end{cases}$$

а) За теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 7. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{x;\, 4y;\, z+2y\}$ по контуру трикутника L, що вирізаний із площини $P_0:\ 2x-y+4z=4$ координатними площинами:

а) за теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 8.

а) Знайти ротор і дивергенцію векторного поля $\vec{a}=grad\, u,$ де $u=xyz^2$. Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}$ потенціальним, соленоїдальним, лапласовим;

б) Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}=\{x-5yz;\, y-5xz+;\, z-5xy\}$ потенціальним, соленоїдальним.

Поверхневі інтеграли. Векторний аналіз

Варіант №28

Завдання 1. Знайти:

а) масу частини поверхні $\sigma: \quad x^2+y^2+z^2=a^2 \quad (x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0)$ з поверхневою густиною $\gamma(x,y,z)=x^2+y^2$;

б) площу поверхні $\sigma: \quad x=\sqrt{16-y^2}$, яку відтинають площини $x=0, \quad z=0, \quad z=3$.

Завдання 2. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x+1;\,4y;\,2z\}$ через ту частину площини $P_0:\ x+2y+z/2=1$, що розміщена у першому октанті (нормаль до площини P_0 утворює гострий кут з віссю Oz) двома способами:

а) методом проектування на три координатні площини;

б) методом проектування на одну координатну площину.

Завдання 3. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x+1;\,4y;\,2z\}$ через повну поверхню піраміди G, яка утворена площиною $P_0:\ x+2y+z/2=1$ та координатними площинами, у напрямі зовнішньої нормалі до її поверхні:

а) зробити рисунок піраміди і застосувати теорему Гаусса-Остроградського;

б) обчислити безпосередньо.

Завдання 4. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x+xy^2;\ y-yx^2;\ z-3\}$ через частину поверхні $G:\ x^2+y^2=z^2\ (z\ge 0)$, яку відтинає площина $P:\ z=1$ (нормаль - зовнішня до замкненої поверхні, утвореної заданими поверхнями) :

а) безпосередньо;

б) доповнивши поверхню G до замкненої.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{yz-2x;\,\sin x+y;\ x^2-2z\}$ через замкнену поверхню $G:\ 3x-2y+z=6, \quad x=0,\ y=0,\ z=0$ (нормаль - зовнішня до поверхні G).

Завдання 6. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{y;z;x\}$ вздовж замкненого контуру $L:\begin{cases} z=2(1-x^2-y^2), \\ z=1. \end{cases}$

а) За теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 7. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{2x-4y;\,y;\,z\}$ по контуру трикутника L, що вирізаний із площини $P_0:\ x+3y-6z=6$ координатними площинами:

а) за теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 8.

а) Знайти ротор і дивергенцію векторного поля $\vec{a}=grad\,u$, де $u=y\sin xz$. Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}$ потенціальним, соленоїдальним, лапласовим;

б) Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}=\{4yz+3x;4xz+3y;4xy+3z\}$ потенціальним, соленоїдальним.

Поверхневі інтеграли. Векторний аналіз

Варіант №29

Завдання 1. Знайти:

а) масу поверхні $\sigma:\quad z=\sqrt{16-y^2}\quad (0\le y\le 4)$ з поверхневою густиною $\gamma(x,y,z)=\dfrac{1}{16+x^2}$;

б) площу частини поверхні $\sigma:\quad z=9-x^2-y^2$, яку відтинають площини $z=0,\quad y=0$ $(z\ge 0,\quad x\ge 0)$.

Завдання 2. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{2x;\, y;\, z+1\}$ через ту частину площини $P_0:\ x+y+z=1$, що розміщена у першому октанті (нормаль до площини P_0 утворює гострий кут з віссю Oz) двома способами:

а) методом проектування на три координатні площини;

б) методом проектування на одну координатну площину.

Завдання 3. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{2x;\, y;\, z+1\}$ через повну поверхню піраміди G, яка утворена площиною $P_0:\ x+y+z=1$ $P_0:\ x/3+y+z/2=1$ та координатними площинами, у напрямі зовнішньої нормалі до її поверхні:

а) зробити рисунок піраміди і застосувати теорему Гаусса-Остроградського;

б) обчислити безпосередньо.

Завдання 4. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x+xy^2;\, y-yx^2;\, z\}$ через частину поверхні $G:\ x^2+y^2+z^2=16$, яку відтинає площина $P:\ z=0\ \ (z\ge 0)$ (нормаль - зовнішня до замкненої поверхні, утвореної заданими поверхнями) :

а) безпосередньо;

б) доповнивши поверхню G до замкненої.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{y^2+z^2+6x;\, \mathrm{e}^z-2y+x;\ x+y-z\}$ через замкнену поверхню $G:\ x^2+y^2=z^2,\quad z=1,\ z=3$ (нормаль - зовнішня до поверхні G).

Завдання 6. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{xz+y;\, yz-x;\, -x^2-y^2\}$ вздовж замкненого контуру $L:\begin{cases} x^2+y^2=1,\\ z=3.\end{cases}$

а) За теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 7. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{x;\, 2y-6z;\, z\}$ по контуру трикутника L, що вирізаний із площини $P_0:\ 2x+2y+z=2$ координатними площинами:

а) за теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 8.

а) Знайти ротор і дивергенцію векторного поля $\vec{a}=grad\, u,$ де $u=z-\cos x\sin y$. Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}$ потенціальним, соленоїдальним, лапласовим;

б) Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}=\{3x-2yz;3y-2xz;3z-2xy\}$ потенціальним, соленоїдальним.

Поверхневі інтеграли. Векторний аналіз

Варіант №30

Завдання 1. Знайти:

а) масу поверхні, яка обмежена площинами $x=0,\ \ y=0,\ \ z=0,\ \ x=2,\ \ y=2,\ \ z=3$ з поверхневою густиною $\mu(x,y,z)=xyz^2$;

б) площу частини поверхні $\sigma:\ \ z=x^2+y^2$, яку відтинають площини $y=0,\ z=4\ (y\ge 0,\ z\le 4)$.

Завдання 2. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{1-x;\,2y;\,z\}$ через ту частину площини $P_0:\ x+2y+3z=1$, що розміщена у першому октанті (нормаль до площини P_0 утворює гострий кут з віссю Oz) двома способами:

а) методом проектування на три координатні площини;

б) методом проектування на одну координатну площину.

Завдання 3. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{1-x;\,2y;\,z\}$ через повну поверхню піраміди G, яка утворена площиною $P_0:\ x+2y+3z=1$ та координатними площинами, у напрямі зовнішньої нормалі до її поверхні:

а) зробити рисунок піраміди і застосувати теорему Гаусса-Остроградського;

б) обчислити безпосередньо.

Завдання 4. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x;y;z\}$ через частину поверхні $G:\ x^2+y^2=1$, яку відтинають площини $P_1:\ z=0,\ P_2:\ z=2$ (нормаль - зовнішня до замкненої поверхні, утвореної заданими поверхнями) :

а) безпосередньо;

б) доповнивши поверхню G до замкненої.

Завдання 5. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=\{x/2+z^2;\ x\cdot z+y/4;\ xy-2\}$ через замкнену поверхню $G:\ x^2+y^2+z^2=4x-2y+4z-8$ (нормаль - зовнішня до поверхні G).

Завдання 6. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{2y;1;-2yz\}$ вздовж замкненого контуру $L:\begin{cases}x^2+y^2=z^2,\\ z=3.\end{cases}$

а) За теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 7. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=\{2x;\,y;\,z+6y\}$ по контуру трикутника L, що вирізаний із площини $P_0:\ x-2y+z=4$ координатними площинами:

а) за теоремою Стокса; **б)** безпосередньо.

Завдання 8.

а) Знайти ротор і дивергенцію векторного поля $\vec{a}=grad\,u,$ де $u=2z+\cos x\cos y$. Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}$ потенціальним, соленоїдальним, лапласовим;

б) Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}=\{yz+2x;xz+2y;xy+2z\}$ потенціальним, соленоїдальним.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст]: учебное пособие для вузов в 2-х ч. Ч. II / Павел Ефимович Данко, Александр Георгиевич Попов, Татьяна Яковлевна Кожевникова. – Изд. 5-е, исп. – М.: Высш. шк., 1996. – 416 с.: ил.; 21 см. – Библиогр.: с. 416 . – 10000 экз. – ISBN 5–06–003071–7 (ч. II). – ISBN 5–06–003072.

2. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для вузов [Текст]: учебник для вузов . Том I - II. – М. Наука, 1972, 1978.

3. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике [Текст]: Тридцать пять лекций. 2 часть / Дмитрий Письменный; [вступ. ст. автора] – М. : Рольф, 2002. – 256 с.: ил; 21 см. – 10000 экз. – ISBN 5–7836–0312–0.

4. Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике. [Текст]: учебник для вузов / Ч. 1-5. – Харьков, Издательство Харьковского университета, 1967–1972.

5. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Векторный анализ. – М. : Наука, 1978.

6. Грималюк В. П., Кухарчук М. М., Ясінський В. В. Вища математика. – К. : Віпол, 2004. Ч. 2 – 400 с. : іл. 289. – ISBN 966-622-081-4.

Поверхневі інтеграли. Векторний аналіз

Зміст